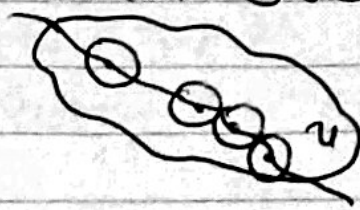
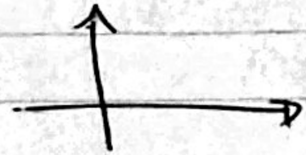
μηδέν.

14/1/19

Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμός: (π.χ. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ έχει σημείο τοπικού μεγίστου στο $\bar{x} \in U$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$: $f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$ και η $f(\bar{x})$ ονομάζεται τοπικό μέγιστο)





Θεώρημα:
(Αναγκαία συνθήκη τοπ. ακροτάτων SOS όταν πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις)
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\exists\, \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow$ f: μερικώς διαφ. στο $\bar{x}$) στο σημείο τοπικού ακροτάτου $\bar{x}$ (μέγιστο ή ελαχ.). Τότε $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

[Εφαρμογή: π.χ αν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ διαφ/μη τότε έχουμε υποψήφια (πιθανά) σημεία τοπικών ακροτάτων στα σημεία $\bar{x} \in U$ όταν $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$]

Προσοχή: Αν $U \subset \mathbb{R}^n$, δεν είναι ανοιχτό, μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα μόνο για την (και αν έχω αναγκαία διαφορισιμότητα)

Π.χ. $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ [π.χ. για $n=1$ $f(x)=|x|$

]

Η f αυτή έχει $\underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{= \frac{x}{\|x\|}} \in \mathbb{R}^n$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$
(ΑΣΚΗΣΗ) $\Rightarrow \|\nabla f(\bar{x})\| = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η f δεν έχει τοπ. ακρότατο σε κανένα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$

Στο σημείο $\bar{x} = \bar{0}$, όμως η f δεν έχει $\nabla f(\bar{0})$)

- Το θεώρημα αυτό δε μας λέει τι συμβαίνει στο $\bar{x} = \bar{0}$. [Μας λέει, μόνο αλλά κι αυτό χρήσιμο, ότι εκτός από το $\bar{x} = \bar{0}$ αλλού δεν έχει ακρότατα]

Όμως βλέπουμε $f(\bar{0}) = \|\bar{0}\| = 0$, ότι:
$f(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Π.χ.: και $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\| > 0$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x} = \bar{0}$ γνήσιο ολικό ελάχιστο και κανένα άλλο ακρότατο δεν υπάρχει.

(*) Σημεία $\bar{x}$ στα οποία $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ ονομάζονται κρίσιμα σημεία

Θεώρημα (Ικανή συνθήκη : πάλι υπό προϋποθέσεις) τοπ. ακρ.
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό : $f \in C^2(U)$, και $\bar{x} \in U$ με $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$. Τότε :

(α) $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό μέγιστο

(β) $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο

(γ) $Hf(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ μη ορισμένα $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ σαγματικό σημείο

[Σκεπτικό απόδειξης: $f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2}\bar{h}^T Hf(\bar{x}) + \ldots$)
$o(\|\bar{h}\|^2)$ για $\bar{h} \to \bar{0}$]

Παράδειγμα 1(α): $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$;
$\nabla f(x,y) = 2(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ το μόνο πιθανό σημείο ακροτάτου.

$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ η f στο $(0,0)$ γνήσιο ολικό ελάχιστο (και πουθενά αλλού ακρότατο)

(1β): $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2-y^2$
$\nabla f(x,y) = -2(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$
$Hf(0,0) = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ το μόνο πιθανό σημείο ακροτάτου.
$\Rightarrow$ η f έχει στο $(0,0)$ γνήσιο ολικό μέγιστο (και πουθενά αλλού)

1(γ) $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = 2(x,-y)$
$\Rightarrow (x_1,y_1) = (0,0)$: το μόνο πιθανό σημείο ακροτάτου στο $(0,0)$
$H_f(0,0) = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow$ η f έχει στο $(0,0)$ σαγματικό σημείο

Παράδειγμα 2 (αν ο $H_f(\bar{x})$ είναι ημιορισμένος (θετικά ή αρνητικά, δηλ. έχει ιδιοτιμή 0) δεν μπορώ να πω τίποτα (από αυτό το εργαλείο). Επίσης, είναι παράδειγμα για το τι μπορώ να κάνω.)

Έστω οι $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,4$
$f_1(x,y) = x^2+y^4$, $f_2(x,y) = x^2$, $f_3(x,y) = x^2+y^3$,
$f_4(x,y) = x^2 - y^4$
[$f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $i=1,\dots,4$ και πεδίο ορισμού $=\mathbb{R}^2$ ανοιχτό $\Rightarrow$ μπορώ να χρησιμοποιήσω και την ικανή και την αναγκαία συνθήκη]

Επίσης, $\nabla f_1(x,y) = (2x, 4y^3)$, $\nabla f_2(x,y) = 2(x,0)$,
$\nabla f_3(x,y) = (2x, 3y^2)$, $\nabla f_4(x,y) = (2x, -4y^3)$

κρίσιμα σημεία σ' αυτά $\Rightarrow H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $(0,0)$

$\Rightarrow H_{f_2}(0,y) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $(0,y)$ $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow H_{f_3}(0,0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $(0,0)$

$\Rightarrow H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(0,0)$

Όμως, εξετάζουμε αυτές τις συναρτήσεις στα κρίσιμα σημεία βλέπουμε:

- $f_1(0,0) = 0$ και $f_1(x,y) > 0$ για $(x,y) \neq (0,0)$ $\Leftrightarrow x^2+y^2>0$

[$f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ·
$f(x,y) = 0 \Rightarrow x=y=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$]

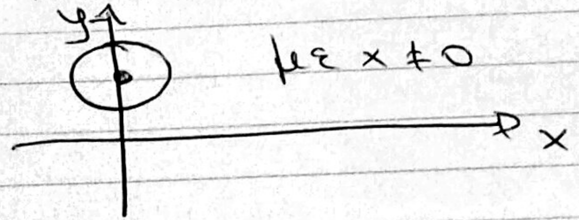
$\Rightarrow$ η f_1 έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο στο $(0,0)$ (και πουθενά αλλού ακρότατα)

- $f_2(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$f_2(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

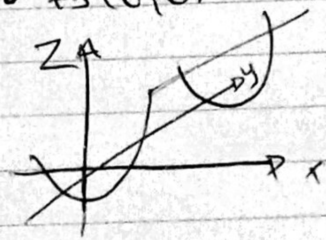
$\Rightarrow f_2(0,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$, $f_2(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f_2$ έχει (όχι γνήσιο) σημείο ολικού ελαχίστου σε κάθε $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$



με $x \neq 0$

- $f_3(0,0) = 0$, αλλά: $f_3(0,y) \begin{cases} <0, & y<0 \\ >0, & y>0 \end{cases}$



• $f_4(x,y) = x^2 - \underbrace{y^4}_{=(y^2)^2}$, κρίσιμο σημείο $(0,0)$,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_4(0,y) = -y^4$, $f_4(x,0) = x^2 \Rightarrow$ στο $(0,0)$ η f_4 <u>δεν</u> έχει ακρότατο (έχει «σαγματικό σημείο υπό την ευρεία έννοια») και δεν έχει πουθενά αλλού ακρότατα

[Το ίδιο για την f_3]

<u>Άσκηση:</u>
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και ολικά ακρότατα και χαρακτηρίστε τα